



Wydział Mechaniczny Energetyki i Lotnictwa
Zakład Wytrzymałości Materiałów i Konstrukcji



Metoda elementów skończonych (MES2)

Wykład 1a. Wprowadzenie

10.2024

Dr hab. inż. Piotr MAREK , prof. uczelni, pok. NL130, piotr.marek@pw.edu.pl

1. **MES II** (1W+1L)
 2. Wykłady (7x2 godz.+1godz. na kolokwium)
 3. Laboratoria komputerowe (15 godz.)
 4. Konsultacje na MS Teams
 5. W semestrze przewidziane 1 kolokwium (oceniane w skali od 0 do 5)
 6. Zaliczenie wykładu – ocena min. 2,75 (3-)
 7. Zaliczenie laboratorium – na zasadach ustalonych z prowadzącym lab.
 8. Zaliczenie przedmiotu – wymagane zaliczenie obu części (wykład i lab.)
- **Ocena końcowa** = $\frac{1}{2}W + \frac{1}{2}L$

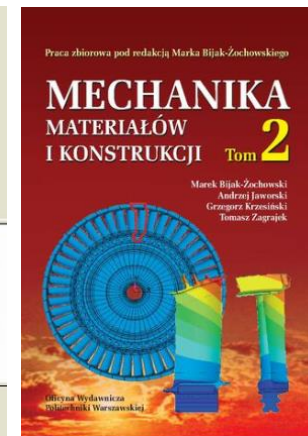
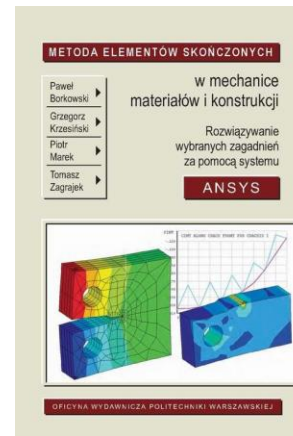
Metody przybliżone w analizie ośrodków ciągłych

Wykład (15h):

- Szacowanie błędów i adaptacyjne techniki remeshing.
- Stacjonarny przepływ ciepła i naprężenia termiczne.
- Wprowadzenie do dynamiki konstrukcji, drgania swobodne.
- Wyboczenie konstrukcji sprężystych, obciążenie krytyczne
- Zagadnienia nieliniowe w mechanice konstrukcji - podstawowe techniki numeryczne.
- **Zagadnienia nieliniowe materiałowo**
- **Zagadnienia kontaktowe**
- Materiały ortotropowe i struktury kompozytowe.
- Modelowanie parametryczne i optymalizacja projektu

Laboratorium komputerowe (15h):

Modelowanie prostych zagadnień: naprężenia termiczne, zagadnienia kontaktu, plastyczność i naprężenia własne, drgania swobodne, wyboczenia konstrukcji powłokowej, modelowania parametrycznego i optymalizacji kształtu



1. Bijak-Żochowski M., Jaworski A., Krzesiński G., Zagrajek T.: **Mechanika Materiałów i Konstrukcji**, Tom 2, Of. Wyd. PW, 2023
2. Borkowski P., Krzesiński G., Marek P., Zagrajek T.: **MES w mechanice materiałów i konstrukcji. Rozwiązywanie wybranych zagadnień za pomocą programu ANSYS**, Oficyna Wydawnicza PW, 2022
3. Bathe, K.J.: Finite Element Procedures. 2nd ed. Prentice Hall Inc., 2014. https://web.mit.edu/kjb/www/Books/FEP_2nd_Edition_4th_Printing.pdf
4. Bathe, K.J.: Finite Element Procedures in engineering practice, Prentice Hall Inc., 1981.
<https://soaneemrana.org/onewebmedia/Finite%20Element%20Procedures%20in%20Engineering%20Analysis%20Bathe%20K.J.pdf>
5. Huebner K.H., Dewhirst D.L., Smith D.E., Byrom T.G.: **The finite element method for engineers**, J. Wiley & Sons 2001
6. Kącki E.: **Równania różniczkowe cząstkowe w zagadnieniach fizyki i techniki**, Warszawa WNT 1992.
7. Kiełbasiński A., Schwetlick H.: **Numeryczna algebra liniowa**. WNT, 1992.
8. Kleiber M.(red): **Komputerowe metody mechaniki ciał stałych**, Warszawa PWN 1995.
9. Rakowski G., Kacprzyk Z.: **Metoda elementów skończonych w mechanice konstrukcji**, Warszawa, Oficyna Wydawnicza PW, 1993.
10. Zienkiewicz O.C., Taylor R.: **The Finite Element Method**. – różne wydania
<http://ceb.ac.in/knowledge-center/E-BOOKS/The%20Finite%20Element%20Method%20Vol1%20-%20The%20Basis%20-%20R.%20Taylor.pdf>

MES jako metoda przybliżona

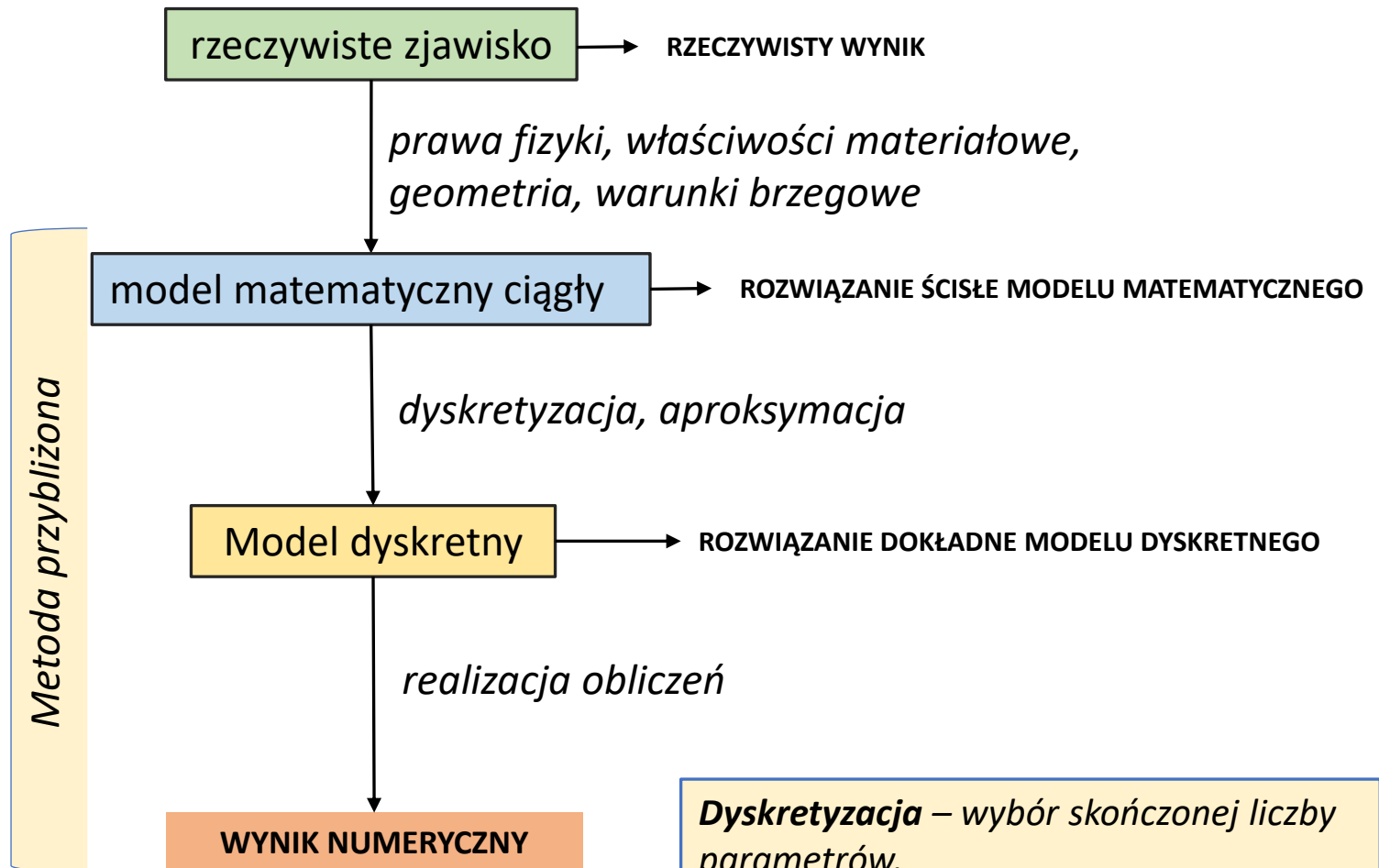
Metoda elementów skończonych (MES) jest metodą przybliżoną, którą można wykorzystać jako procedurę numeryczną do rozwiązywania problemów fizycznych, w tym:

- mechaniki ciała stałego,
- wymiany ciepła,
- przepływu cieczy,
- elektromagnetyzmu,
- zagadnienia pól sprzężonych
- ...

MES został opracowany w latach 50 XX wieku w celu rozwiązywania problemów dla przemysłu cywilnego i lotniczego. Metoda stała się najpotężniejszym narzędziem analitycznym, głównie dzięki rozwojowi komputerów.

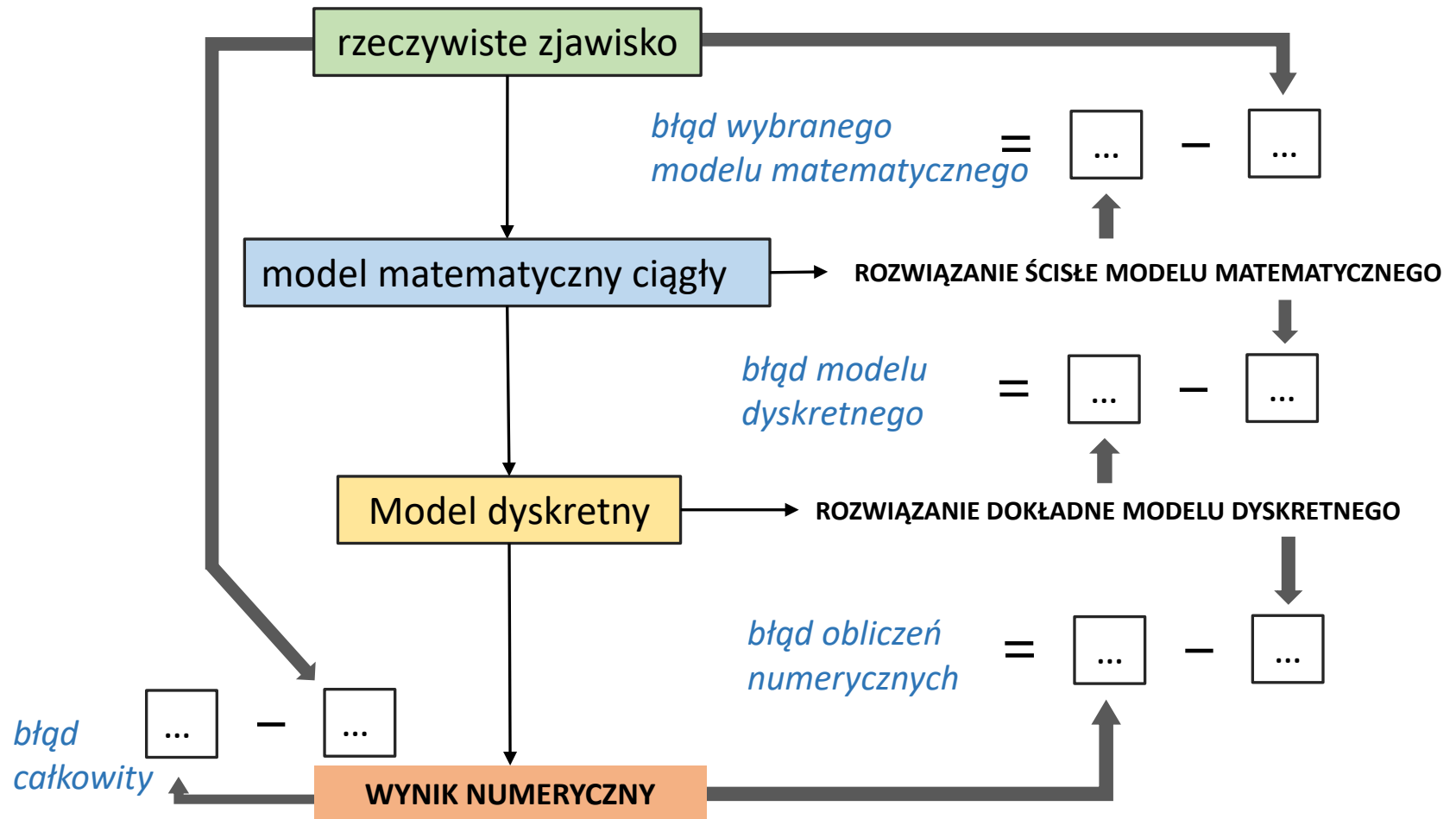
Celem wykładu jest dostarczenie podstawowej wiedzy i umiejętności potrzebnych do zrozumienia i zastosowania MES do rozwiązywania problemów brzegowych dla równań różniczkowych cząstkowych

Rozwiązanie zagadnienia analizy ośrodków ciągłych metodą przybliżoną



Dyskretyzacja – wybór skończonej liczby parametrów,
Aproksymacja – sposób opisu za pomocą z góry założonych prostych funkcji zależnych od poszukiwanych parametrów

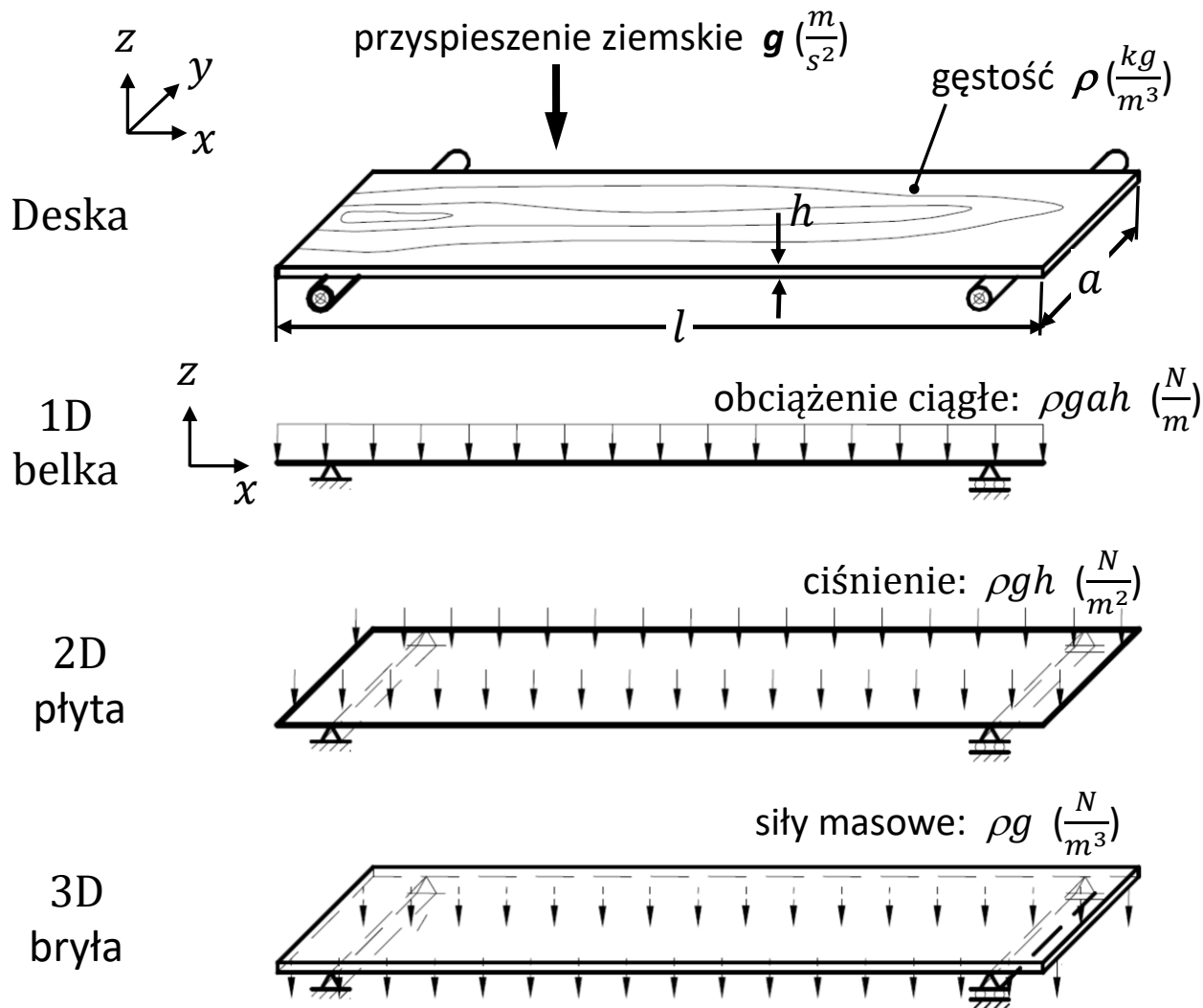
Dokładność obliczeń MES – źródła błędów



błąd całkowity = bł. wybranego modelu mat. + bł. modelu dyskretnego + bł. obliczeń numerycznych

bł. wybranego modelu mat. \approx bł. modelu dyskretnego \approx bł. obliczeń numerycznych \rightarrow min

Wybór modelu matematycznego – błąd modelu matematycznego



Założenia:

Własności materiału:

- *izotropowe,*
- *anizotropowe,*
- *lepkosprężyste,*

Duże ugięcia

Warunki brzegowe
(kontakt)

Nie ma jednego
dobrego modelu!

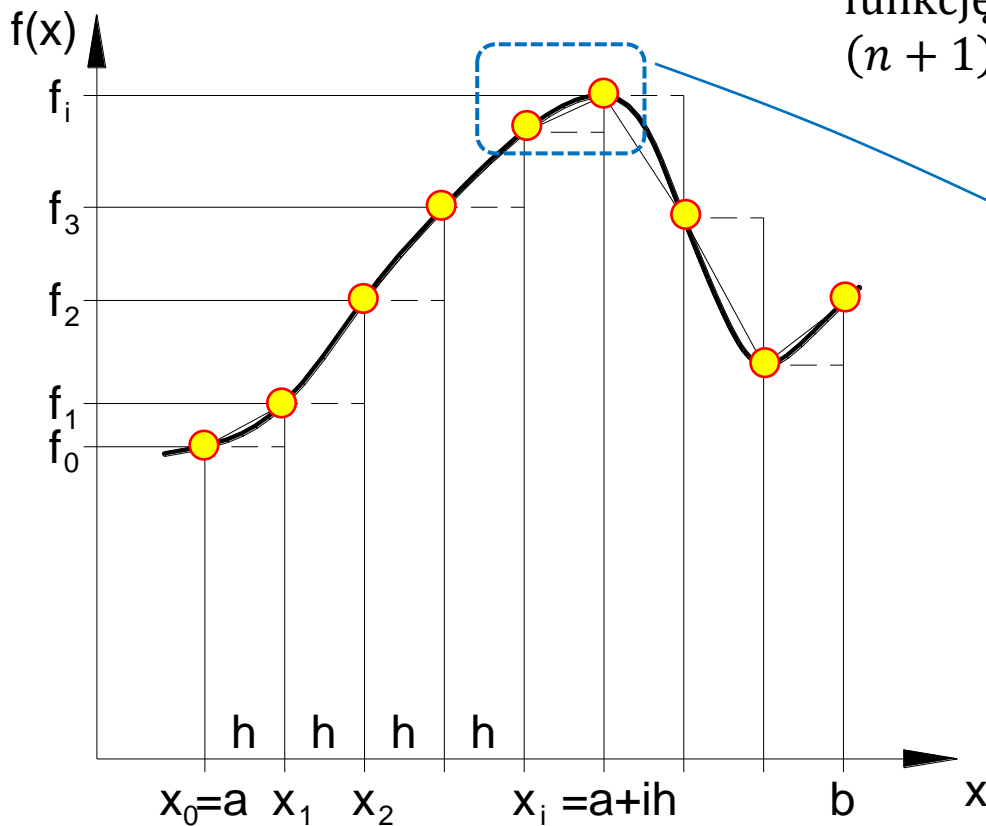
Właściwy model zależy od:

- *celu analizy,*
- *wymagań stawianych konstrukcji,*
- *żądanej dokładności wyników,*
- *dostępności danych materiałowych,*
- *dostępnych narzędzi obliczeniowych*

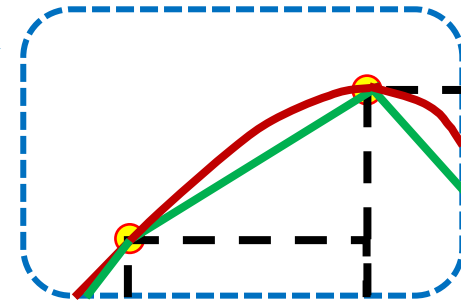
Dyskretyzacja i aproksymacja na przykładzie funkcji jednej zmiennej

dowolna funkcja: $f(x)$ w przedziale $\langle a, b \rangle$

dzielimy przedział $\langle a, b \rangle$ na n równych podprzedziałów o długości: $h = (b - a)/n$



funkcję ciągłą $f(x)$ reprezentuje zbiór $(n + 1)$ wartości: $f(a + ih), i = 0, 1, 2, n$



Aproksymacja może być:

- stała (schodkowa),
- liniowa (łamana),
- funkcjami sklejanymi.

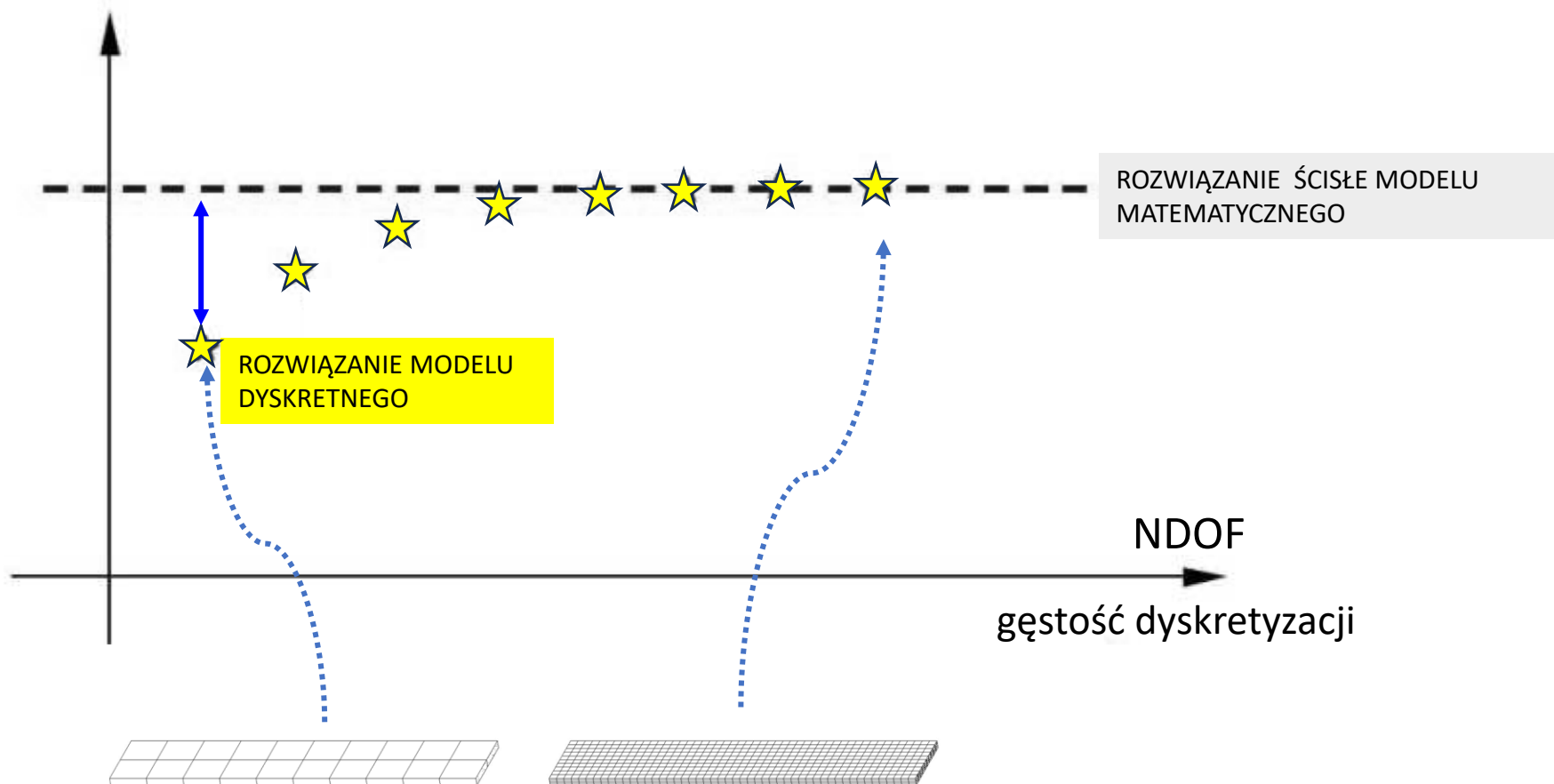
Wpływ dyskretyzacji – błąd modelu dyskretnego

Dyskretyzacja

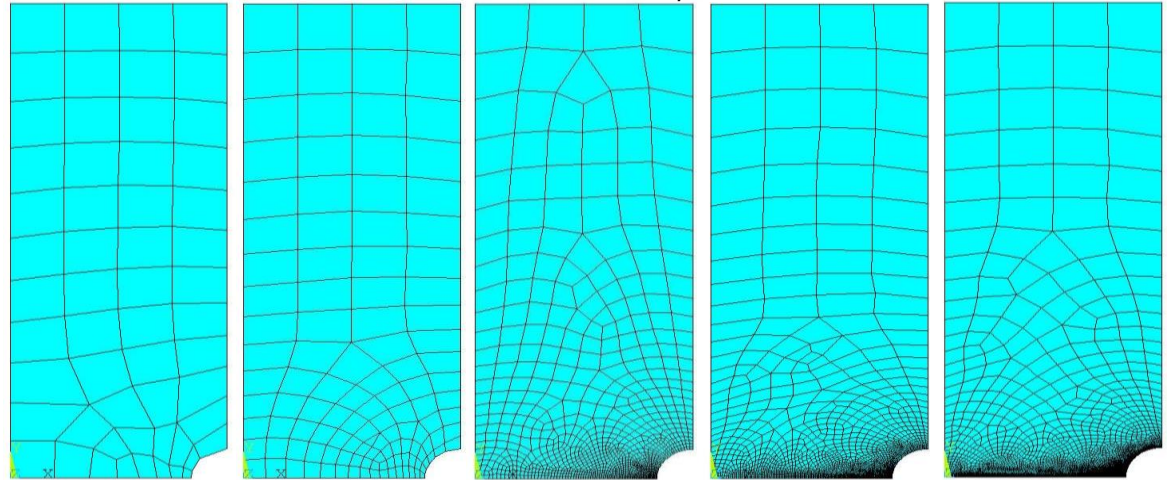
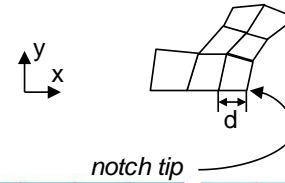
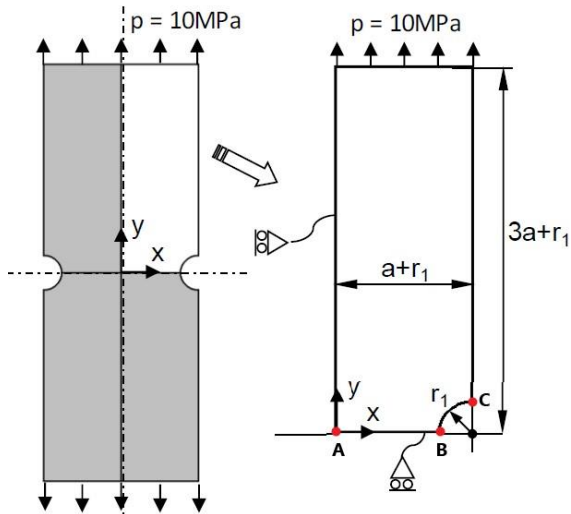
- rodzaj (mapped, free, sweep)
- gęstość

Typ elementu

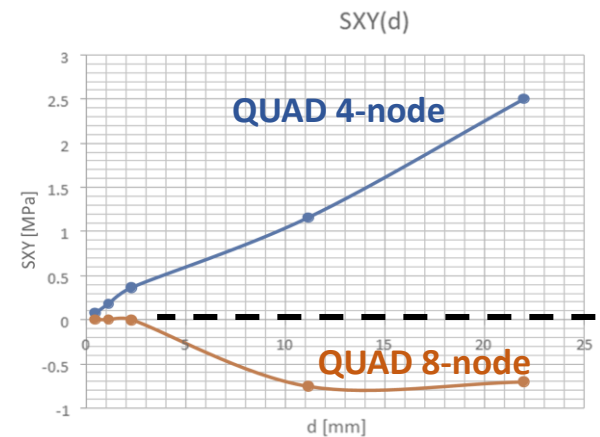
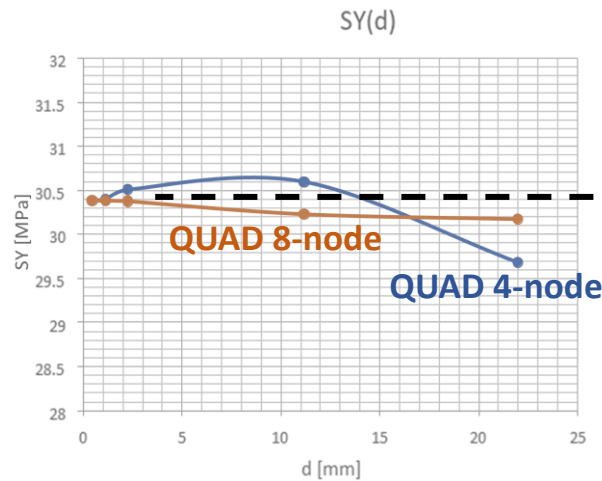
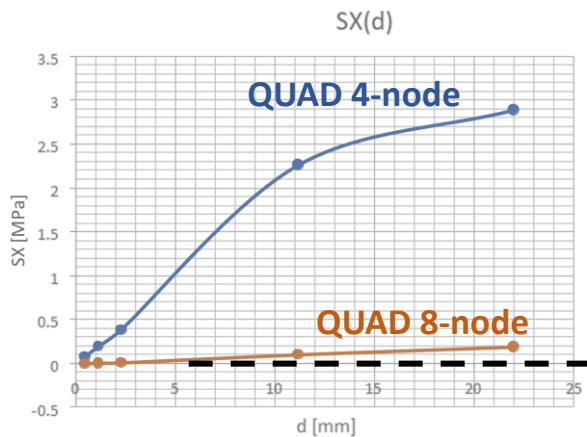
- funkcje kształtu
- schemat całkowania



Przykład Tarcza z karbem



Składowe naprężenia w wierzchołku karbu w funkcji rozmiaru elem. d (wyniki numeryczne)



--- EXACT SOLUTION OF A MATHEMATICAL MODEL

Błąd numeryczny

- solver
- wskaźnik uwarunkowania macierzy

$$\text{cond}([K]) = \|[K]\| \cdot \|[K]^{-1}\|$$

Wskaźnik uwarunkowania macierzy pozwala na oszacowanie, z jaką (maksymalnie) dokładnością (do ilu miejsc po przecinku) możemy podać wynik.

- zaokrąglanie (ilość cyfr znaczących)

W przybliżeniu, jeśli stopień uwarunkowania $\text{cond}([K]) = 10^k$, wtedy do k cyfr mogą zostać zaniedbane podczas rozwiązywania układu równań liniowych.

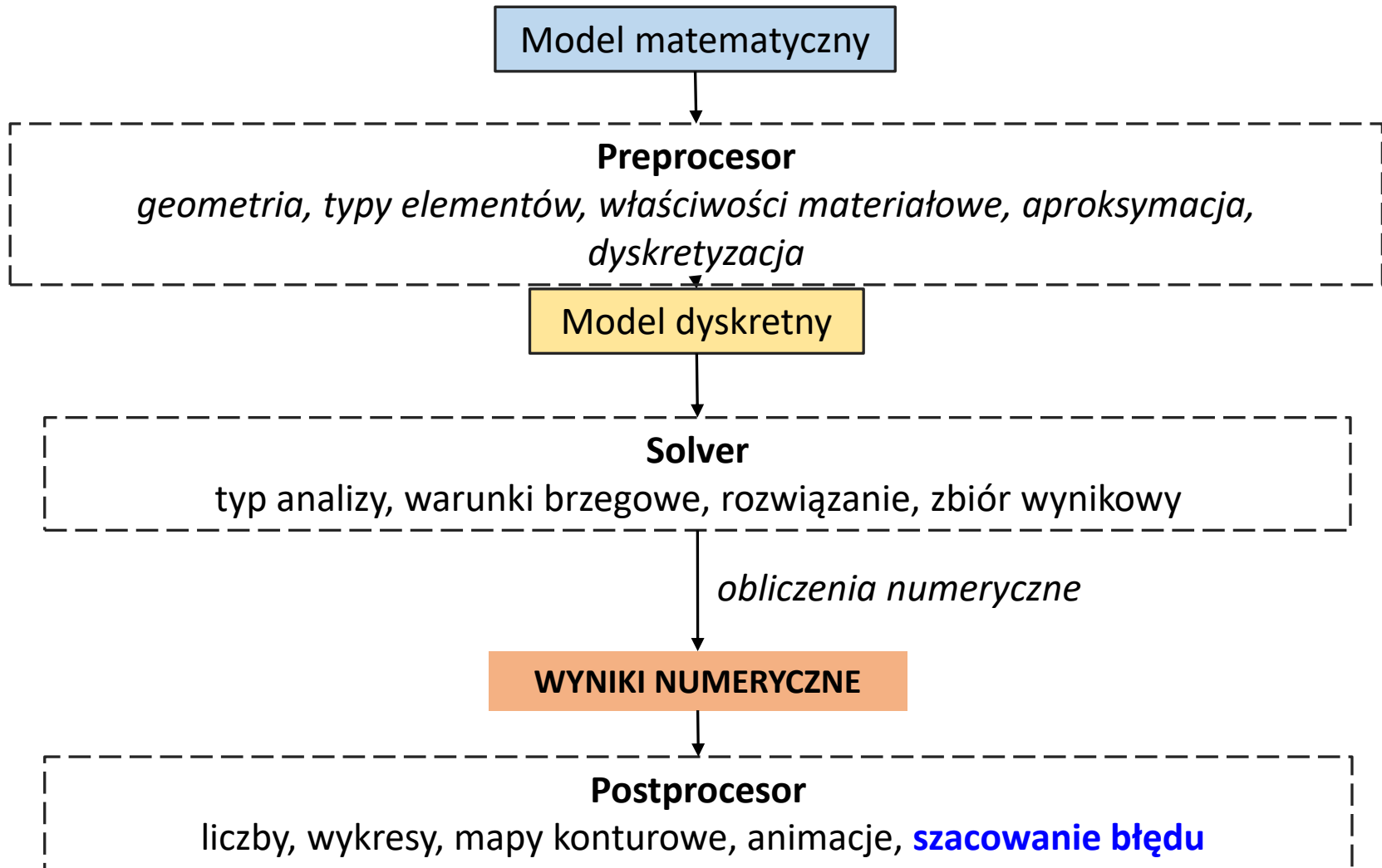
$$r \geq p - \log_{10}(\text{cond}([K]))$$

p – liczba cyfr znaczących w komputerowej reprezentacji liczb

r – liczba cyfr znaczących wyniku

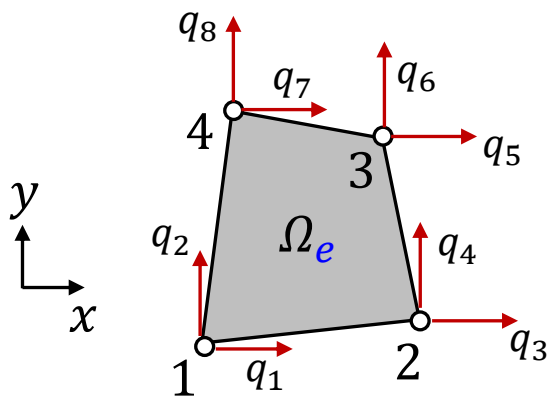
W modelach MES $\text{cond}([K])$ może osiągać poziom 10^8

Modelowanie MES – główne kroki



Przykład. Rozwiązanie $u(x,y)$ w zadaniu 2D.

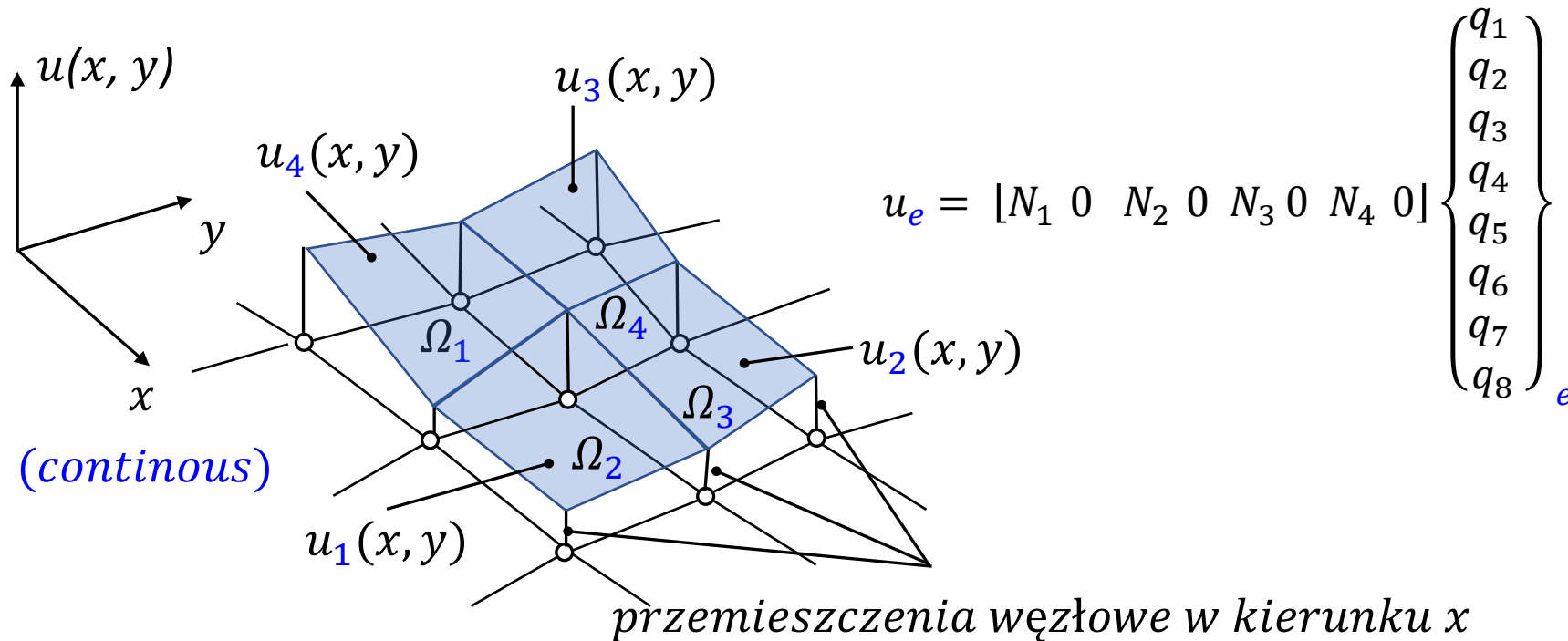
Model MES złożony z 4-węzłowych elementów czworokątnych



$$\{u\} = [N]\{q\}_e$$

$\begin{matrix} 2 \times 1 & & 2 \times 8 & 8 \times 1 \end{matrix}$

$u_e(x,y)$ – przemieszczenie w kierunku x

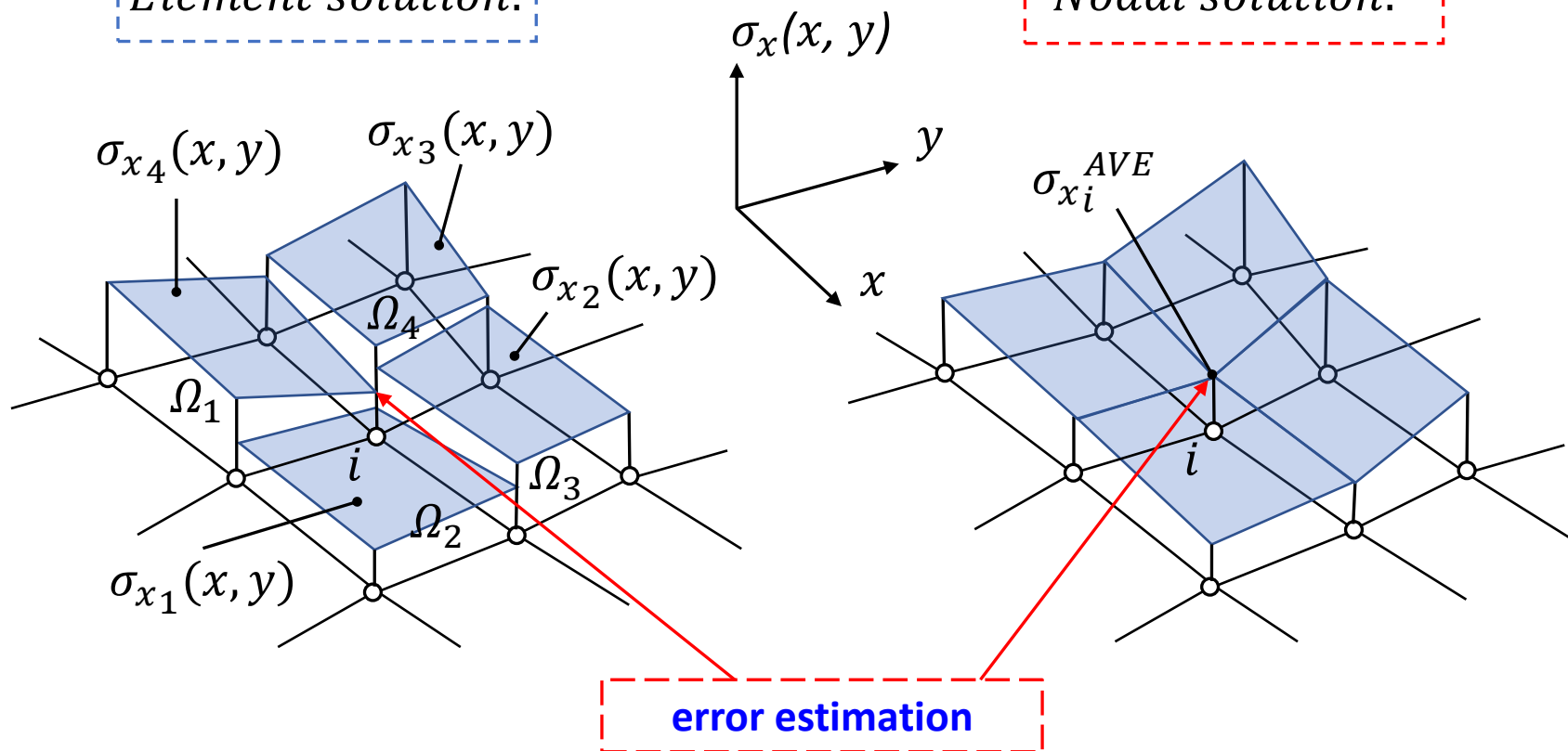


Przykład. Składowe naprężenia $\sigma_x(x, y)$ w zadaniu 2D.

Model MES złożony z 4-ęzłowych elementów czworokątnych

Element solution:

Nodal solution:



For $k = 4$:

$$\sigma_{x_i}^{AVE} = \frac{\sigma_{x_1}(x_i, y_i) + \sigma_{x_2}(x_i, y_i) + \sigma_{x_3}(x_i, y_i) + \sigma_{x_4}(x_i, y_i)}{4}$$